

5.1 モーメントによる変形

1. モーメントと変形

図5-1のように、回転中心から $h/2$ だけ離れたところの2本の同じバネ定数 K_0 を持つバネで支えられているシステムを考える。この右端に下向きの力 P を加えると、上下のバネの伸び、および縮み量 Δs による回転角 θ は、

$$\theta = \frac{\Delta s}{(h/2)} = \frac{2P \times l}{(h^2 \times K_0)} \quad (5.1)$$

となる。この回転角 θ による先端のたわみ δ は、

$$\delta = \theta l \quad (5.2)$$

として与えられる。

このバネの部分の、図5-2に示すようなヤング係数 E のポリウレタンでできた弾性体の場合、モーメント $M (= P \times l)$ が作用したときの回転角 θ は、断面2次モーメント I を用いて、

$$\theta = \phi x = \frac{Mx}{EI} \quad (5.3)$$

となる。この回転角 θ による先端のたわみ δ は、

$$\delta = \theta l = \frac{Mx}{EI} l \quad (5.4)$$

として与えられる。

2. 片持部材の変形

ここまでは、材端がバネや弾性体でサポートされている状態を考えて、部材自体は変形しないものとして考えてきた。いま、図5-3に示すように左端が固定され、全体がポリウレタンでできた弾性体の右端に下向きの力を加えると、先端が大きく下方に移動し、部材も変形する。

弾性体の中に書き加えた格子の線は、もとは水平・鉛直であったものである。水平の線は大きく湾曲しているのに対し、鉛直線は、傾いてはいるが直線を保持している。この傾きは、固定端から加力端に近くなるにしたがって、大きくなっているが、変化の度合いは逆に小さくなり、加力端付近ではほぼ平行になっている。

この部材に生じる力は、図5-4に示したとおりであり、曲げモーメントの大きな所の変化の度合いが大きいことがわかる。

このような連続の弾性体は、単位長さのバネが連続していると考えることができる。つまり、単位長さのバネによる回転角と変形の重ねあわせが、全体の回転角と変形になっていると考える。いま、図5-5に示したように、弾性体の左端の微小部分 dx を切り出して考えてみよう。端部に弾性体を取り付けたときと、まったく同様に考えることができる。右端に加えた力 P によるモーメントは、この微

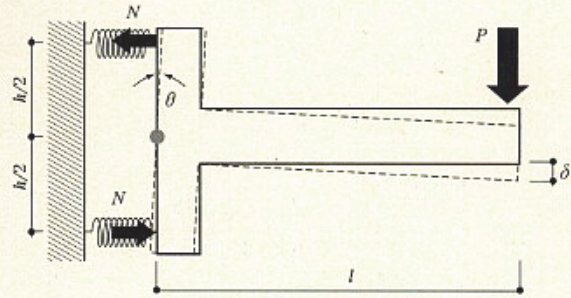


図5-1 2本のバネで支えられたシステムの変形

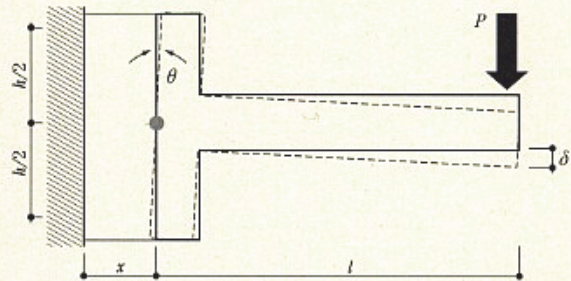


図5-2 弾性体で支えられたシステムの変形

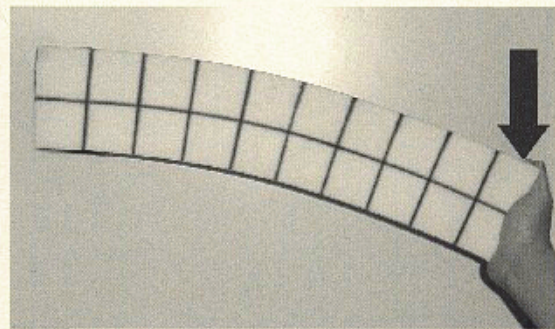
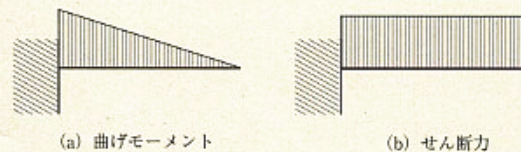


図5-3 弾性体でできた片持梁の変形



(a) 曲げモーメント

(b) せん断力

図5-4 片持梁に生じる力

小部分の右端と左端で異なるが、微小部分なので、この差を無視して M とすると、(4.36) (4.37) 式と同様に、ヤング係数 E 、断面2次モーメント I を用いて、

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} = EI\phi \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

$$d\theta = \frac{Mdx}{EI} \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

となる。また、ここでの傾き $d\theta$ による右端の変形量 δ は、回転角に距離 l を掛け、

$$\delta = l \times d\theta \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

となる。

次に図5-6に示したように、左端から x の位置で微小部分 dx を切り出して考えてみよう。右端に加えた力 P によるモーメント M_x は、距離が短くなっており、 $M_x = P(l-x)$ となる。また、その部分より左側の部分の変形により、すでに θ_x だけ傾き、 δ_x だけ変形している。この部分でのモーメント M_x と回転角の増分 $d\theta$ は、

$$M_x = P(l-x) = EI \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

$$d\theta = \frac{M_x}{EI} dx = \frac{P(l-x)}{EI} dx \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

となる。ここでの傾き θ_x は、左端から u の位置の微小区間 du の回転角増分 $d\theta_u$ の累積であるから、0 から x まで積分することにより求まる。

$$\begin{aligned} \theta_x &= \int_0^x d\theta_u = \frac{1}{EI} \int_0^x M_u du = \frac{P}{EI} \int_0^x (l-u) du \\ &= \frac{P}{EI} (lx - x^2/2) \quad \dots\dots\dots (5.10) \end{aligned}$$

また、左端から x の位置での変形量 δ_x は、左端から u の位置の微小区間 du の回転角増分 $d\theta_u$ に、各微小区間から x の位置までの距離を掛けたもの $\delta_u = d\theta_u \times (x-u)$ の累積値であるので、これを0から x まで積分することにより求まる。

$$\begin{aligned} \delta_x &= \int_0^x (x-u) d\theta_u = \frac{1}{EI} \int_0^x M_u (x-u) du \\ &= \frac{P}{EI} \int_0^x (l-u)(x-u) du = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad \dots\dots\dots (5.11) \end{aligned}$$

右端の自由端での回転角と変形量は、 $x = l$ を代入して、

$$\theta = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

となる。

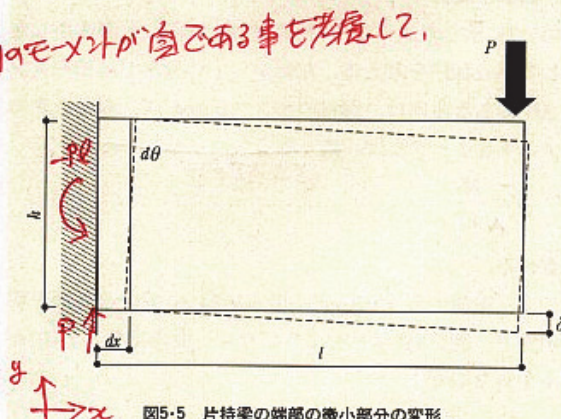


図5-5 片持梁の端部の微小部分の変形

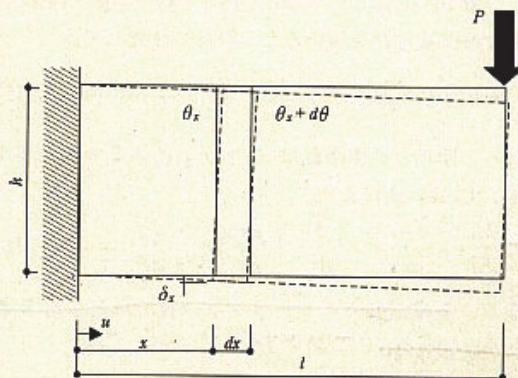


図5-6 片持梁の任意の位置の微小部分の変形

3. 曲率と変形

図5・7に示したような片持梁に任意の荷重 w が作用し変形している状態を考える。左端から x の位置でのモーメント M_x による曲率は、部材のヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とすれば、~~第4章でも習ったように、~~

$$\phi = \frac{M_x}{EI} \quad (5.13)$$

で表せる。

一方、左端から x の位置の微小区間 dx 部分の断面を切り出すと、図5・8に示したようになり、曲率半径 ρ は $d\theta$ が微小であるので、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (5.14)$$

で与えられる。

この微小区間 dx 内での鉛直方向の変形の増分 dy は、この点での回転角 θ を用いると、符号に注意して、

$$dy = -\theta \times dx \rightarrow \theta = -\frac{dy}{dx} \quad (5.15)$$

となる。曲率と曲率半径は $\phi = 1/\rho$ であるので、(5.13)

(5.14) (5.15) 式により、

$$-\frac{M_x}{EI} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (5.16)$$

となる。~~上端引張りのモーメントは負である事を考慮し、これを变形した、~~

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} \quad (5.17)$$

が、曲げモーメント M_x による部材のたわみ曲線を求める微分方程式となる。曲げモーメント M_x は、材軸方向の座標 x の関数として与えられるので、この微分方程式を積分することにより、任意のモーメントに対する任意の位置での回転角とたわみを計算することができる。

$$\theta = \int \frac{dy}{dx} = \left(\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \right) \quad (5.18)$$

$$y = \int \left(\int \frac{M}{EI} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (5.19)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は積分定数であり、境界条件より定める。

例題5・1 片持梁の変形を求める

図5・9に示したような、ヤング係数 E 、断面2次モーメント I の断面からなる長さ l の片持梁の端部に、集中荷重 P が作用したときの変形を求めよ。

解 答

左端から任意の点までの距離を、図に示したように x と置くと、その点での曲げモーメント M_x は、

$$M_x = -P(l - x)$$

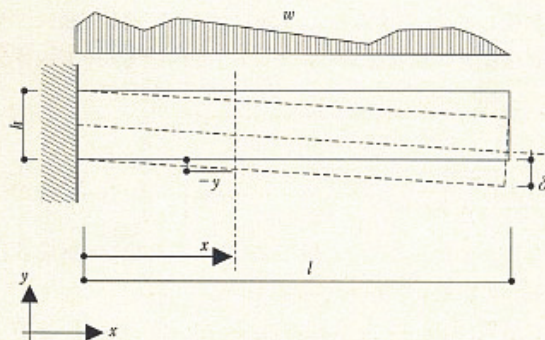


図5・7 任意の荷重を受ける片持梁の変形

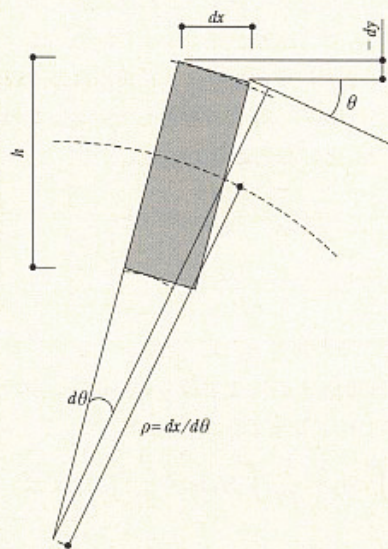


図5・8 微小部分の変形と曲率半径

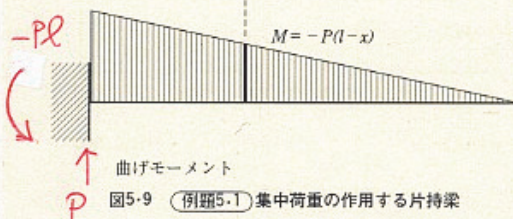
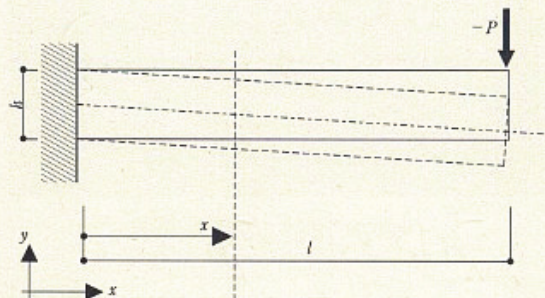


図5・9 例題5・1 集中荷重の作用する片持梁

これを(5.17)式に代入して,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}(l-x)$$

これを x で積分して,

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{d^2y}{dx^2} dx = -\frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$y = -\frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2$$

境界条件は, $x=0$ の固定端で, $\theta = dy/dx = 0$, $y=0$ であるので, $C_1=C_2=0$ となり,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

が得られる.

右端では, $x=l$ を代入して,

$$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$y = \frac{Pl^3}{3EI}$$

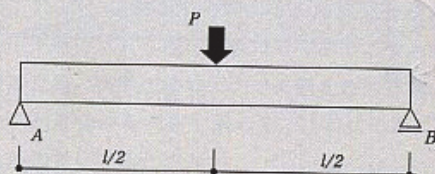
となる. (5.12) 式と同じ結果が得られている.

【問題5.1】

例題5.1の片持梁に, 全長にわたり等分布荷重 w が作用したときの変形を求めなさい.

【問題5.2】

図に示したような, ヤング係数 E , 断面2次モーメント I の断面からなる単純梁に, 集中荷重 P が作用したときの変形を求めなさい.



(ヒント) 曲げモーメントが不連続になるときは, 連続な部分にそれぞれ分けて考え, 境界条件で一致させる

4. モールの定理

第3章「3.2節 静定梁」で習ったように分布荷重 w とせん断力 Q , 曲げモーメント M の関係は,

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -w \dots\dots\dots (5.20)$$

一方, 曲げモーメント M と変形 θ , y の関係は次式で

与えられる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (5.21)$$

(5.20) (5.21) 式を比較すると、荷重 w に対し、 $-M/EI$ が、せん断力 Q に対し回転角 θ 、曲げモーメント M に対し変形 y が対応していることがわかる。

すなわち、 $-M/EI$ を荷重とみなして（仮想荷重）、それが作用したときのせん断力と曲げモーメントを求めれば、部材各部の回転角と変形が簡単に求まることになる。

ここで注意が必要な点は、荷重からせん断力、曲げモーメントを求める積分と、仮想荷重から回転角、変形を求める積分とは境界条件が異なるので、積分定数が一致しないことである。

図5・10(a)に示した単純梁においては、断面に生じる力を求める場合、両端とも $Q \neq 0$ 、 $M = 0$ 部材の変形を求める場合、両端とも $\theta \neq 0$ 、 $y = 0$ となり、両者の境界条件は一致しているので、そのまま仮想荷重により回転角、変形を求めることができる。

ところが、図5・10(b)に示した片持梁においては、断面に生じる力を求める場合、固定端 $Q \neq 0$ 、 $M \neq 0$ 自由端 $Q = 0$ 、 $M = 0$ 部材の変形を求める場合、固定端 $\theta = 0$ 、 $y = 0$ 自由端 $\theta \neq 0$ 、 $y \neq 0$

となり、固定端と自由端ではその条件が入れ替わっている。つまり、固定端、自由端では仮想荷重を受ける梁としては、固定端は自由端に、自由端は固定端に入れ替える必要がある。

このように、仮想荷重としてそのせん断力、モーメントを考え、それが部材に生じたとして部材の回転角、変形を求める方法をモールの定理という。

さらに中間支承と中間ヒンジの関係も自由端と固定端の関係と同様の関係があり、これを利用して連続梁の変形も算定できる。

例題5・2 片持梁の変形をモールの定理を用いて求める

図5・11に示したような、ヤング係数 E 、断面2次モーメント I の断面からなる片持梁の端部に、集中荷重 P が作用したときの変形をモールの定理を用いて求めよ。

解答

仮想荷重は片持梁であるので、自由端と固定端の境界条件を入れ替えると、図5・11(b)の曲げモーメント図より、図5・11(c)に示したような等変分布荷重になる。これを集中荷重に置き換えると、

$$W = \frac{Pl^2}{2EI}$$

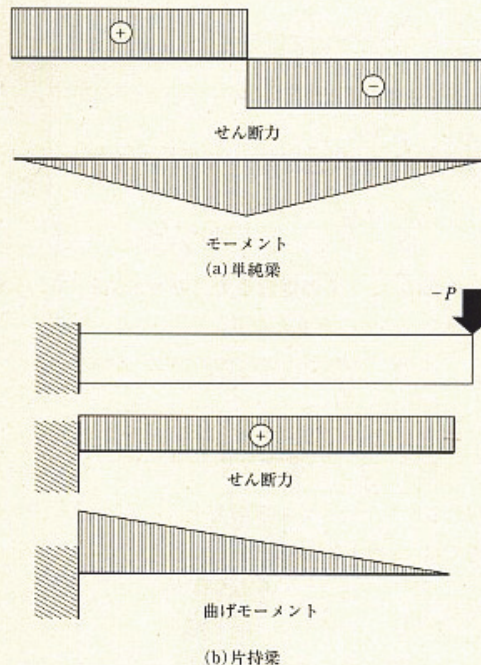


図5・10 集中荷重の作用する単純梁と片持梁

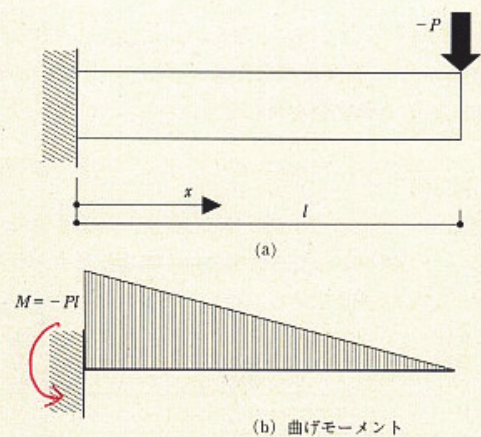


図5・11 集中荷重の作用する片持梁と仮想荷重

となる。これより、自由端の回転角 θ と変形 y は、

$$\theta = Q = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$y = M = \frac{-Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} = \frac{-Pl^3}{3EI}$$

となり、例題5・1の結果と同じとなる。

【問題5・3】

問題5・2の梁中央の変形と両端の回転角をモールの定理を用いて求めなさい。

5.2 せん断力による変形

曲げを受ける部材のせん断応力度は断面内で一定でなく、たとえば矩形断面の場合、図5・12に示したように中央で最大となる放物線になる（例題4・6参照）。このときのせん断ひずみは、応力度分布と同じ形状となる。このせん断ひずみによる変形は、次に示すような中立軸のせん断ひずみの累積値となる。

いま、図5・13に示したような矩形の片持ち梁に荷重が作用し、部材がせん断変形しているとすると、左端から x の位置の dx 区間のせん断によるたわみ量 dy_s は、材軸でのせん断ひずみ γ に dx を掛けたものになる。よって、せん断剛性係数 G 、断面積 A とすると、

$$dy_s = \gamma \times dx = \frac{1.5Q}{GA} dx \quad \dots\dots\dots (5.22)$$

これより左端から x の位置のせん断変形 y_s としては、

$$y_s = \int_0^x dy_s = \frac{1.5}{GA} \int_0^x Q_s dx \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

となる。(5.23) は断面中心軸のせん断変形を与えている。端面の上下端ではせん断応力度は0であり、せん断変形は0となるため、実際の部材でのせん断変形の算定にはエネルギーの釣り合いを考えて求める。これについては、『建築構造力学Ⅱ』で触れる。

例題5・3 せん断変形を求める

例題5・1で曲げ変形を求めた、せん断剛性係数 G 、断面積 A の断面からなる片持梁の端部に集中荷重 P が作用したときのせん断変形を求めよ。

解 答

集中荷重 P が作用するので、せん断力は全長にわたり P となる。これを (5.23) 式に代入すると、

$$y_s = \frac{1.5P}{GA} \int_0^x dx = \frac{1.5P}{GA} x$$

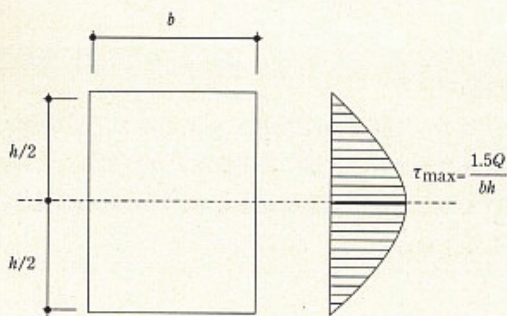


図5・12 断面内のせん断応力度の分布

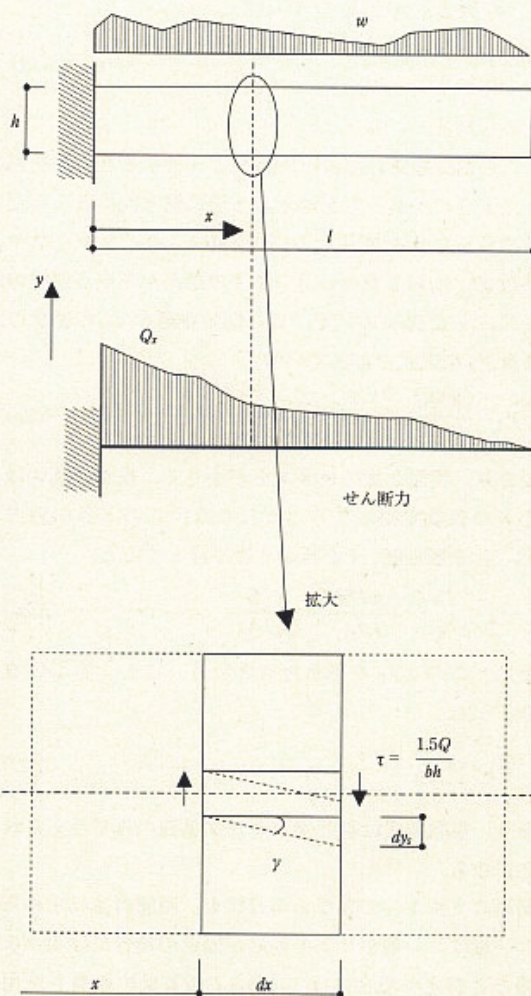


図5・13 任意の荷重を受ける片持梁のせん断変形

【問題5・2】

モーメント

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad Mx = \frac{P}{2}x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l \quad Mx = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

これより

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = + \frac{M_x}{EI} = + \frac{P}{2EI}x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = + \frac{M_x}{EI} = + \frac{P}{2EI}(l-x)$$

積分して

$$\frac{dy_1}{dx} = + \frac{P}{4EI}x^2 + c_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = + \frac{P}{2EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_2$$

さらに積分して

$$y_1 = \frac{P}{12EI}x^3 + c_1x + c_3$$

$$y_2 = \frac{+P}{2EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2x + c_4$$

境界条件より

$$x = 0 \text{ で } y_1 = 0$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ で } \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = 0$$

$$y_1 = y_2$$

$$x = l \text{ で } y_2 = 0$$

これより

$$C_1 = \frac{-Pl^2}{16EI}, \quad C_3 = 0, \quad C_2 = \frac{-3Pl^2}{16}, \quad C_4 = \frac{Pl^3}{48EI}$$

これより

$$y_1 = + \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{Pl^2}{16EI}x$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ では } y = \frac{-Pl^3}{48EI} \text{ となる.}$$

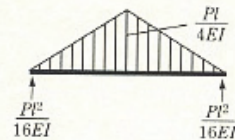
【問題5・3】

$$\delta = \frac{-Pl^3}{48EI}$$

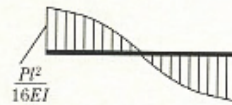
$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI}$$

モールの定理を用いる.

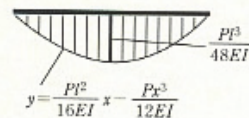
仮想荷重は



仮想せん断図



仮想モーメント図



【問題5・4】

$$\text{曲げ変形} \quad \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4Pl^3}{E \cdot bd^3}$$

$$\text{せん断変形} \quad \frac{1.5Pl}{GA} = \frac{1.5Pl}{Gbd}$$

$$\frac{\text{曲げ変形}}{\text{せん断変形}} = \frac{G8l^2}{E3d^2} \approx \left(\frac{l}{d}\right)^2$$

スパンとせいが等しいとき、曲げ変形とせん断変形はほぼ等しく、スパンが伸びると曲げ変形が多くなる。