5·1 モーメントによる変形

1. モーメントと変形

図5·1のように，回転中心から $h/2$ だけ離れたところの2本の同じバネ定数 K_0 を持つバネで支えられているシステムを考える．この右端に下向きの力 P を加えると，上下のバネの伸び，および縮み量 Δs による回転角 θ は，

$$\theta=\frac{\Delta s}{(h/2)}=\frac{2P\times l}{(h^2\times K_0)} \quad \cdots\cdots (5.1)$$

となる．この回転角 θ による先端のたわみ δ は，

$$\delta=\theta\, l \quad \cdots\cdots (5.2)$$

として与えられる．

このバネの部分が，図5·2に示すようなヤング係数 E のポリウレタンでできた弾性体の場合，モーメント M（$=P\times l$）が作用したときの回転角 θ は，断面2次モーメント I を用いて，

事と回転角は時計廻りで正である

なる事を考慮して，

右側から

部材の曲げモーメントが負に

$$\theta=\phi x=\frac{-Mx}{EI} \quad \cdots\cdots (5.3)$$

となる．この回転角 θ による先端の下向きのたわみ δ は，

$$\delta=\theta\, l=\frac{-Mx}{EI}l \quad \cdots\cdots (5.4)$$

として与えられる．

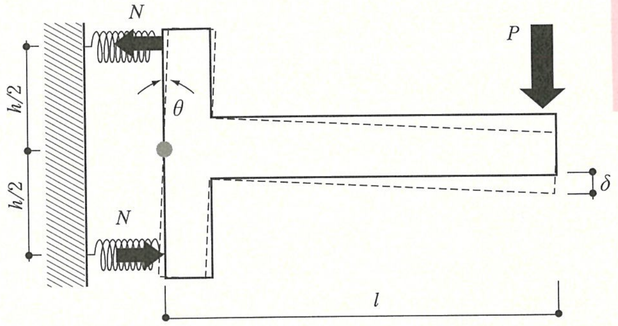


図5·1　2本のバネで支えられたシステムの変形

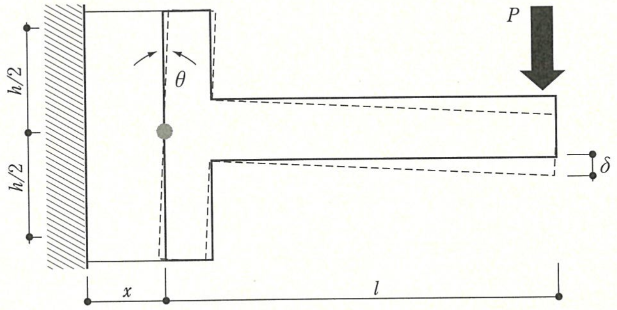


図5·2　弾性体で支えられたシステムの変形

2. 片持部材の変形

ここまでは，材端がバネや弾性体でサポートされている状態を考えて，部材自体は変形しないものとして考えてきた．いま，図5·3に示すように左端が固定され，全体がポリウレタンでできた弾性体の右端に下向きの力を加えると，先端が大きく下方に移動し，部材も変形する．

弾性体の中に書き加えた格子の線は，もとは水平·鉛直であったものである．水平の線は大きく湾曲しているのに対し，鉛直線は，傾いてはいるが直線を保持している．この傾きは，固定端から加力端に近くなるにしたがって，大きくなっているが，変化の度合いは逆に小さくなり，加力端付近ではほぼ平行になっている．この部材に生じる力は，図5·4に示したとおりであり，曲げモーメントの大きな所の変化の度合いが大きいことがわかる．

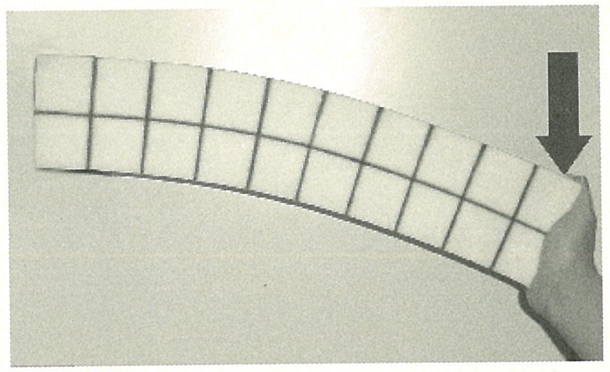
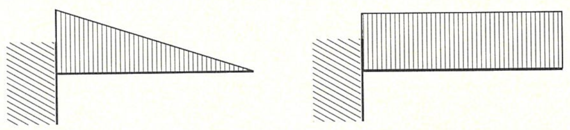


図5·3　弾性体でできた片持梁の変形

このような連続の弾性体は，単位長さのバネが連続していると考えることができる．つまり，単位長さのバネによる回転角と変形の重ねあわせが，全体の回転角と変形になっていると考える．いま，図5·5に示したように，弾性体の左端の微小部分 dx を切り出して考えてみよう．端部に弾性体を取り付けたときと，まったく同様に考えることができる．右端に加えた力 P によるモーメントは，この微小部分の右端と左端で異なるが，微小部分なので，この差を無視して M とすると，(4.36)(4.37′) 式と同様に，ヤング係数 E，断面2次モーメント I を用い，~~上端引張りのモーメントが負であることを考慮して，~~ 部材の曲げモーメントと曲率の符号が逆である事に注意して



(a) 曲げモーメント　　(b) せん断力

図5·4　片持梁に生じる力

$$-M=EI\frac{d\theta}{dx}=EI\phi \quad \cdots\cdots (5.5)$$

$$d\theta=-\frac{Mdx}{EI} \quad \cdots\cdots (5.6)$$

となる．また，ここでの傾き $d\theta$ による右端の変形量 δ は，回転角に距離 l を掛け，~~次のように~~ (5.7)式のようになる。

$$\delta=-l\times d\theta \quad \cdots\cdots (5.7)$$

~~となる．~~

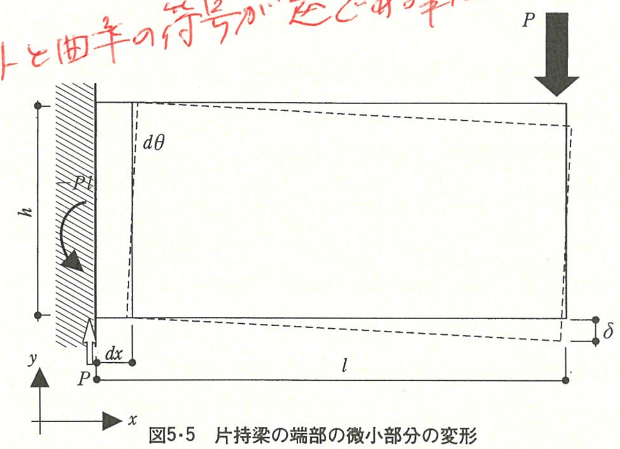


図5·5　片持梁の端部の微小部分の変形

次に図5·6に示したように，左端から x の位置で微小部分 dx を切り出して考えてみよう．右端に加えた力 P によるモーメント M_x は，距離が短くなっており，$M_x=P(l-x)$ となる．また，その部分より左側の部分の変形により，すでに θ_x だけ傾き，δ_x だけ変形している．この部分でのモーメント M_x と回転角の増分 $d\theta$ は，

$$M_x=-P(l-x)=-EI\frac{d\theta}{dx} \quad \cdots\cdots (5.8)$$

$$d\theta=-\frac{M_x}{EI}dx=\frac{P(l-x)}{EI}dx \quad \cdots\cdots (5.9)$$

となる．ここでの傾き θ_x は，左端から u の位置の微小区間 du の回転角増分 $d\theta_u$ の累積であるから，0から x まで積分することにより求まる．

$$\theta_x=\int_0^x d\theta_u=\frac{1}{EI}\int_0^x M_u du=\frac{P}{EI}\int_0^x (l-u)\,du \quad \cdots (5.10)$$

$$=\frac{P}{EI}(lx-x^2/2)$$

また，左端から x の位置での変形量 δ_x は，左端から u の位置の微小区間 du の回転角増分 $d\theta_u$ に，各微小区間から x の位置までの距離を掛けたもの $\delta_u=d\theta_u\times(x-u)$ の累積値であるので，これを0から x まで積分することにより求まる．

$$\delta_x=\int_0^x (x-u)\,d\theta_u=\frac{-1}{EI}\int_0^x M_u(x-u)\,du$$

$$=-\frac{P}{EI}\int_0^x (l-u)(x-u)\,du=-\frac{P}{EI}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) \quad \cdots\cdots (5.11)$$

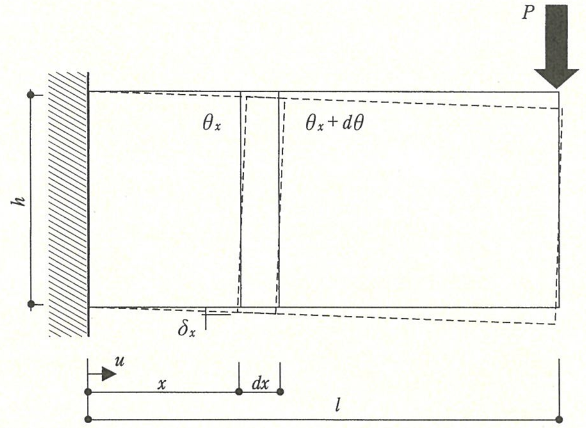


図5·6　片持梁の任意の位置の微小部分の変形

右端の自由端での回転角と変形量は，$x=l$ を代入して，

$$\theta=\frac{Pl^2}{2EI} \quad \cdots\cdots (5.12)$$

$$\delta=\frac{-Pl^3}{3EI}$$

となる．

※この章では，座標軸を上向き，右，時計廻りを正，モーメントは下端引張を正として記載している．本によっては，y 軸の座標軸を下向きを正として記述したものも多く，その場合と符号が異なるので注意が必要である．